Тәжірибелік сабақ 2

Екінші ретті дербес туындылы дифференциялдық теңдеулерді классификациялау және канондық түрге келтіру.

Екінші ретті дербес туынды дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі

$$F(x,u,..u_{x_i}...,..u_{x_i x_j},...)=0 \qquad (1)$$

өрнекпен жазылады.

$$a_{11}(x,y)U_{xx}+2a_{12}(x,y)U_{xy}+a_{22}(x,y)U_{yy}+f(x,y,U,U_x,U_y)=0 \quad (2)$$

мұндағы a_{ij}(x,y) коэффициенттер $\forall(x,y)\in\Omega$ үшін белгілі нақты үзіліссіз функциялар.

(2 теңдеуін G облысының M_0 нүктесінде классификациалау үшін

$$\delta(x_0,y_0)=a_{12}^2(x_0,y_0)-a_{11}(x_0,y_0)\cdot a_{22}(x_0,y_0)$$

өрнегінің таңбасын анықтаған жеткілікті екенін көреміз

Егер G облысының M_0 нүктесінде:

1) $\delta(x_0,y_0)>0$ болса, онда (2) дифференциалдық теңдеуін G облысының M_0 нүктесінде гиперболалық типті теңдеу деп атайды;

2) $\delta(x_0,y_0)<0$ болса, онда (2) дифференциалдық теңдеуін G облысының M_0 нүктесінде эллиптикалық типті теңдеу деп атайды;

3) $\delta(x_0,y_0)=0$ болса, онда (2) дифференциалдық теңдеуін G облысының M_0 нүктесінде параболалық типті теңдеу деп атайды;

1 – мысал. Мына

а) $2U_{xx}-6U_{xy}+5U_{xy}+xU_x=0$

ә) $\sin y\cdot U_{xx}+2(\cos x+\sin y)\cdot U_{xy}+2\cos x\cdot U_{yy}+U=0$

б) $x^2U_{xx}+2xyU_{xy}+y^2U_{yy}+\sin xU_x+U_y=0$

теңдеулердің типін анықтау керек.

Шешуі а) - б) теңдеулерінің коэффициенттері жазықтықтың барлық нүктелерінде анықталған болғандықтан, бұл теңдеулердің анықталу облыстары жазықтықпен беттесетін болады.

а) - б) теңдеулерінің типін анықтау үшін төмендегідей қадамдар жасаймыз.

1. а) - б) теңдеулерінің $a_{11}(x,y), a_{12}(x,y)$ және $a_{22}(x,y)$ коэффициенттерін анықтаймыз.

а) $a_{11}(x,y)=2,\ a_{12}(x,y)=-3,\ a_{22}(x,y)=5$

ә) $a_{11}(x,y)=\sin y,\ a_{12}(x,y)=\cos x+\sin y,\ a_{22}(x,y)=2\cos x$

б) $a_{11}(x,y)=x^2,\ a_{12}(x,y)=x\cdot y,\ a_{22}(x,y)=y^2$

2. а) - б) теңдеулері үшін $\delta(x_0,y_0)$ өрнегін құрып, таңбасын анықтаймыз.

а) $\delta(x_0,y_0)=(-3)^2-2\cdot5=9-10=-1<0,\ M_0(x_0,y_0)\in R^2$.

ә) $\delta(x_0,y_0)=(\cos x_0+\sin y_0)^2-2\cos x_0\cdot\sin y_0=\cos^2 x_0+\sin^2 y_0=-1>0,\quad M_0(x_0,y_0)\in R^2$

.

б) $\delta(x_0,y_0)=(x_0,y_0)^2x_0^2y_0^2=x_0^2\cdot y_0^2-x_0^2y_0^2=0,\ M_0(x_0,y_0)\in R^2$

Сонымен

а) теңдеуі үшін $\delta(x_0,y_0)$ өрнегінің таңбасы R^2 жазықтығында жатқан барлық $M_0(x_0,y_0)$ нүктелері үшін теріс. Сондықтан а) теңдеуі R^2 жазықтығында эллиптикалық типті теңдеуге жатады. ә) теңдеуі үшін $\delta(x_0,y_0)$ өрнегінің таңбасы R^2 жазықтығында жатқан барлық $M_0(x_0, y_0)$ нүктелері үшін оң. Сондықтан ә) теңдеуі R^2 жазықтығында гиперболалық типті теңдеуге жатады.

б) теңдеуі үшін $\delta(x_0, y_0)$ өрнегінің мәні нөлге тең болғандықтан бұл теңдеу 2 $\boldsymbol{R}^2$ жазықтығында параболалық типті теңдеуге жатады.

Теңдеудің типі теңдеуге қатысатын бос мүшеге, бірінші ретті дербес туындылармен ізделінді функцияның алдындағы коэффициенттерге байланыссыз, тек екінші ретті дербес туындылардың алдындағы коэффициенттерге байланысты анықталады. Теңдеуге жаңа тәуелсіз айнымалар енгізу теңдеудің типін өзгертпейді. Бірақ коэффициенттері айнымалы теңдеудің типі бір нүктеден екінші нүктеге көшкен кезде өзгеріп отырады.

2-мысал.

$$U_{xx} - 2\sin x U_{xy} - \cos^2 x U_{yy} - \cos U_y = 0 \qquad (3)$$

теңдеуін канондық түрге келтіру керек.

Шешуі:

1. (3) теңдеуінің типін анықтау керек. Ол үшін (3) тендеуіндегі a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентерін анықтап $\delta = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}$ өрнегінің таңбасын зерттейміз:

$$a_{11}(x, y) = 1,\ a_{12}(x, y) = -\sin x,\ \ a_{22}(x, y) = -\cos^2 x,$$

ал

$$\delta = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 > 0$$

болғандықтан, (3) теңдеуі R^2 жазықтығының барлық нүктелерінде гиперболалық типті теңдеуге жатады.

2.Теорияны пайдаланып, (3) теңдеуінің сипаттамалық теңдеуін құрамыз:

$$(dy)^2 + 2\sin x dxdy - \cos^2 x (dx)^2 = 0 .$$

Бұдан

$$\frac{dy}{dx} = -1 - \sin x, \qquad \frac{dy}{dx} = 1 - \sin x$$

3. Бұл теңдеулерді интегралдау арқылы $y = -x + \cos x + c_1$, $y = x + \cos x + c_2$ сипаттамалар үйірін табамыз.

4. Сипаттамалар үйірін пайдаланып, жаңа айнымалылар енгіземіз:

$$\begin{cases} \xi = x + y - \cos x \\ \eta = x - y + \cos x \end{cases}.$$

5. $U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}$ туындыларын есептейміз:

$$U_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y = U_\xi - U_\eta$$

$$U_{xx} = U_{\xi\xi}\, \xi_x^2 + 2U_{\xi\eta}\, \xi_x\, \eta_x + U_{\eta\eta}\, \eta_x^2 + U_\xi\, \xi_{xx} + U_\eta\, \eta_{xx} =$$

$$= U_{\xi\xi}\, (1 + \sin x)^2 + 2U_{\xi\eta}\, (1 + \sin x)(1 - \sin x) + U_{\eta\eta}\, (1 - \sin x)^2 + U_\xi \cos^2 x + U_\eta \cos^2 x$$

$$U_{yy} = U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}$$

$$U_{xy} = U_{\xi\eta} \xi_x \xi_y + U_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \eta_x \xi_y) + U_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + U_\xi \xi_{xy} + U_\eta \eta_{xy} =$$

$$= U_{\xi\eta} (1 + \sin x) + U_{\xi\eta} \left[(1 + \sin x)(-1) + (1 - \sin x) \right] + U_{\eta\eta} (1 - \sin x)(-1)$$

6. Табылған туындыларды берілген теңдеуге апарып қойып, ұқсастарын біріктіреміз:

$$U_{\xi\xi}(1+\sin x)^2+2U_{\xi\eta}\left(1-\sin^2 x\right)+U_{\eta\eta}(1-\sin x)^2+U_\xi\cos x+U_\eta\cos x-$$

$$-\cos^2 x\left(U_{\xi\xi}-2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}\right)-2\sin x\left(U_{\xi\xi}(1+\sin x)-2\sin xU_{\xi\eta}-U_{\eta\eta}(1-\sin x)\right)-$$

$$-\cos x\left(U_\xi-U_\eta\right)=U_{\xi\xi}\left[(1+\sin x)^2-\cos^2 x-2\sin x(1+\sin x)\right]+$$

$$+2U_{\xi\eta}\left[\left(1-\sin^2 x\right)+\cos^2 x+2\sin^2 x\right]+U_{\eta\eta}\left[(1-\sin x)^2-\cos^2 x+2\sin x(1-\sin x)\right]-$$

$$-\left(U_\xi-U_\eta\right)\cos x+\left(U_\xi-U_\eta\right)\cos x=0$$

7. Бұдан квадраттық жақшаның ішіндегі өрнектерді есептеп,

$$U_{\xi\eta}=0$$

теңдеуіне келеміз. Бұл берілген (3) теңдеуінің канондық түрі.

8. Теңдеулердің типін анықтау керек:

а) $U_{xx}+4U_{xy}+U_{yy}+U_x+U_y+2U-x^2y=0$

ә) $2U_{xx}+2U_{xy}+U_{yy}+2U_x+2U_y-U=0$

б) $U_{xx}+2U_{xy}+U_{yy}+U_x+U_y+3U-xy^2=0$

в) $4U_{xx}+2U_{yy}-6U_{zz}+6U_{xy}+10U_{zz}+4U_{yz}+2U=0$

г) $2U_{xy}-2U_{xz}+2U_{yz}+3U_x-U=0$

ғ) $U_{xx}+2U_{xy}+2U_{yy}+4U_{yz}+5U_{zz}-xU_x+yU_z=0$

9. Теңдеулерді канондық түрге келтіру керек:

а) $U_{xx}+2U_{xy}+5U_{yy}-32U=0$

ә) $U_{xx}-2U_{xy}+U_{yy}+9U_x+9U_y-9U=0$